Algèbre Linéaire

Devoir Maison - Fiche 2
Licence 2 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

Cette fiche se décompose en deux parties. La première partie est composée de questions de cours dont les justifications sont en générales très courtes et dont toutes les réponses figurent dans le cours (moyennant une petite réflexion par moment). Les questions ne sont pas difficiles et sont un bon moyen pour vous de travailler le cours et de vérifier que les notions sont comprises. La deuxième partie est composée de deux exercices d'applications pour vérifier que les exercices effectuées en TD sont maîtrisées. A nouveau, ces derniers sont très proches de ceux effectués en TD et seront un excellent moyen pour vous de vérifier que vous savez refaire ce qui a été fait en TD.

1 Questions de cours

1. Soit un E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

   (a) Soit $\mathbf{x}$ un élément non nul de E, alors la famille $(\mathbf{x})$ est libre.

   VRAI. La famille ne comporte qu'un seul vecteur non nul, elle est donc obligatoirement libre.

   (b) Soient $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in E$, alors la famille $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est libre.

   FAUX (en général). Prenons deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, disons $\mathbf{x} = (1, 0)$ et $\mathbf{y} = (2, 0)$, nous avons bien $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ mais $\mathbf{y} = 2\mathbf{x}$. La famille de vecteurs $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ainsi définie est **liée**.

   (c) Si une famille de vecteurs de E contient le vecteur nul, elle est liée.

   VRAI. On montre facilement que la définition de famille libre n'est pas vérifiée car

   $$1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

   (d) Une famille libre de vecteurs $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ est une base de $F = Vect(\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\})$.

   VRAI. La famille est libre, de plus, par définition elle engendre l'espace F, elle est donc génératrice. Etant libre **et** génératrice, c'est donc une base de F.

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul. Les propositions A et B suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'un implique l'autre ?

   (a) A : $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une famille liée de E.
   B : $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$.

   Les propositions A et B sont équivalentes, c'est la définition de famille liée.

   (b) A : $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ est une famille libre de E.
   B : si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$ alors :

   $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}_E$$

La proposition B est toujours vraie, peu importe que la famille soit libre ou non. On a donc toujours A implique B, en revanche la réciproque est fausse.

(c) A : E est une espace vectoriel de dimension 1.
B : $\forall \mathbf{a} \in E$ tel que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, alors $E = Vect(\mathbf{a})$.

Il y a équivalence entre les deux propositions. En effet, pour tout $\mathbf{a} \in E$ non nul, la famille $(\mathbf{a})$ est libre, de plus E est de dimension 1 donc $(\mathbf{a})$ est une base de E. De même si E est l'espace engendré par un vecteur $\mathbf{a}$ non nul, il a donc une base qui ne comporte qu'un seul vecteur, il est donc de dimension 1.

3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(a) Tout famille libre de E compte au plus n vecteurs.

VRAI. Si on a une famille d'au moins $n+1$ vecteurs dans un espace dimension n, elle est nécessairement liée.
Cette proposition est donc une condition nécessaire pour qu'une famille soit libre (mais pas suffisante !)

(b) Tout famille génératrice de E compte au plus n vecteurs.

FAUX. Il faudrait reformuler de la façon suivante : toute famille génératrice de E compte au moins n vecteurs.
En effet, on a vu qu'un espace de dimension n était engendré par une famille de n vecteurs.

(c) Une famille qui compte moins de n vecteurs est libre.

FAUX. La famille réduite au vecteur nul n'est pas libre.

(d) Une famille qui compte plus de n vecteurs est liée.

VRAI. C'est une conséquence de la question a). Une famille libre compte au plus n vecteurs.

(e) Une famille qui compte plus de n vecteurs est génératrice.

FAUX. La famille de vecteurs $(\mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_1, 3\mathbf{e}_1, \cdots, n\mathbf{e}_1, (n+1)\mathbf{e}_1)$, où $\mathbf{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, *i.e.* $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \cdots, ..., 0)$, est une famille de $n+1$ vecteurs mais non génératrice.

(f) Si F est un sous-espace vectoriel de E, une famille libre de vecteurs de F est une famille libre de vecteurs de E.

VRAI. F étant un sous-espace de E, si une famille de vecteurs est une famille libre de F, c'est a fortiori une famille libre de E car les vecteurs de F sont aussi des vecteurs de E.

(g) Si F est un sous-espace vectoriel de E, une famille génératrice de F est une famille génératrice de E.

FAUX. Si F est différent de E, la famille de vecteur qui engendre F n'engendre pas E.

4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? L'une implique-t-elle l'autre ?
A : $F \oplus G = E$
B : $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ et $dim(F) + dim(G) = n$.

Si A est vraie, alors l'intersection entre F et G est réduite au vecteur nul de E (c'est la définition d'espaces supplémentaires) et $dim(F)+dim(G) = n$ d'après le Corollaire **??** . Donc B est vraie Réciproquement si B est vraie, en posant $H = F \oplus G$, on peut dire que H est un sous-espace vectoriel de E, de plus

$$dim(H) = dim(F) + dim(G) = dim(E).$$

Donc les espaces H et E sont égaux d'après la Proposition **??**.

5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ muni d'une base $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Soit E' un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n' \in \mathbb{N}^\star$ et $f \in \mathscr{L}(E, E')$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(a) $(f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_n))$ est une base de $Im(f)$

FAUX. Par définition l'image de f est bien engendrée en calculant l'image des vecteurs de base par l'application f. En revanche, rien ne garantit que cette famille soit libre ! Ce n'est d'ailleurs jamais le cas si on considère $f = 0$, *i.e.* l'application nulle.

(b) $rg(f) = rg((f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_n)))$.

VRAI. En effet, la famille $(f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_n))$ est une famille génératrice de l'image de f.

(c) f est injective si et seulement si $dim(Ker(f)) = 0$

VRAI. On a vu plus tôt qu'une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

(d) f est surjective si et seulement si $dim(Im(f)) = n$

FAUX. La proposition aurait été vraie si $n = n'$. En revanche, d'après le théorème du rang on a $dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = n$, ce qui implique que $dim(Ker(f)) = 0$ et donc f est injective.

(e) f est surjective si et seulement si $dim(Im(f)) = n'$

VRAI. Car être surjectif est équivalent à dire que $Im(f) = E'$, ce qui équivaut à l'égalité des dimensions entre ces deux espaces (car $Im(f)$ est un sous-espace de E').

6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit φ une forme linéaire sur E. Montrer que φ est nulle ou surjective.

E étant un espace vectoriel, sa dimension n est supérieure ou égale à 1. De plus, φ étant une forme linéaire, l'image de φ est un sous-espace de $\mathbb{R}$ (espace de dimension 1). Ainsi $dim(Im(\varphi)) \leq 1$, donc deux possibilités.

i) $dim(Im(\varphi)) = 0$, donc $Im(\varphi)) = 0$. L'application φ est donc l'application qui a tout vecteur $\mathbf{x} \in E$ associe le vecteur nul $\mathbf{0}$.
ii) $dim(Im(\varphi)) = 1 = dim(\mathbb{R})$, ce qui signifie que $Im(\varphi) = \mathbb{R}$ donc φ est surjective.

7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(a) Si $rg(f) = n$, alors $f \in \mathscr{GL}(E)$.

VRAI. La proposition indique que f est surjective. De plus, f est également injective d'après le Théorème du rang. On en déduit que f est bijective, *i.e.*

il s'agit d'un automorphisme de E, *i.e.* $f \in \mathscr{GL}(E)$.

(b) $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires dans E.

FAUX. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, où $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique, définie par

$$f(\mathbf{e}_1) = 0 \quad \text{et} \quad f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1.$$

Dans ce cas, $Ker(f) = Im(f) = \mathbb{R}$, on a bien $dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = 2$ mais les deux sous-espace ne sont pas supplémentaires car l'intersection n'est pas réduite à $\mathbf{0}$ mais à $\mathbb{R}$.

(c) Si $Ker(f) \cap Im(f) = \{\mathbf{0}\}$, alors $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires dans E.

VRAI. C'est d'ailleurs l'hypothèse qui manquait à la question précédente et l'égalité des dimensions est une conséquence du Théorème du rang.

2 Exercices

Exercice 2.1. *Soit E un ensemble, typiquement $E = \mathbb{R}^2$ muni d'une loi interne, notée $+$ et d'une loi externe notée $\cdot$ définies pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ par*

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \textit{et} \quad \lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda(x_1 + x_2), \lambda x_2).$$

L'ensemble $(E, +, \cdot)$ a-t-il une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Correction

On peut montrer qu'il ne s'agit pas d'un espace vectoriel. En effet, rappelons que nous devons montrer que les différents points

1. $(E, +)$ est un groupe abélien (*i.e.* commutatif)
2. $\forall \mathbf{x} \in E$, $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.
3. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \mathbf{x} \in E,\ (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$.
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E,\ \alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}') = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{x}'$.
5. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \mathbf{x} \in E,\ \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x})) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x}$.

1. (a) Il est clair que la somme de deux éléments de $\mathbb{R}^2$ reste un élément de $\mathbb{R}^2$.

(b) La loi $+$ est associative, nous avons bien $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$.

(c) Elle admet un élément neutre qui est le vecteur $(0, 0)$.

(d) L'existence d'un inverse pour tout élément $\mathbf{x}$ défini par $-\mathbf{x}$ pour lequel on a $-\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = 0$.

(e) La loi $+$ est bien commutative, on a bien $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.

2. L'existence d'un élément neutre pour la loi externe, noté 1, pour lequel nous devons avoir $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Or, pour tout $\mathbf{x}$, nous avons $1\mathbf{x} = 1 \cdot (x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2) \neq \mathbf{x}$. Ce qui met en défaut ce point là.
3. La distributivité par rapport à la loi interne : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \mathbf{x} \in E$

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = {} & (\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2), \\
= {} & ((\alpha + \beta)(x_1 + x_2), (\alpha + \beta)x_2), \\
= {} & (\alpha(x_1 + x_2), \alpha x_2) + (\beta(x_1 + x_2), \beta x_2), \\
= {} & \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

4. On vérifie aisément la distributivité par rapport à la loi externe. Pour cela $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E$,

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}') = {} & \lambda \cdot (x_1 + x_1', x_2 + x_2'), \\
= {} & (\lambda(x_1 + x_1' + x_2 + x_2'), \lambda(x_2 + x_2')), \\
= {} & (\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_1' + \lambda x_2', \lambda x_2 + \lambda x_2'), \\
= {} & (\lambda(x_1 + x_2), \lambda x_2) + (\lambda(x_1' + x_2'), \lambda x_2'), \\
= {} & \lambda \cdot (x_1, x_2) + \lambda \cdot (x_1', x_2'), \\
= {} & \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{x}'.
\end{aligned}$$

5. On vérifie l'associativitié par rapport à la loi externe $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \mathbf{x} \in E$

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x})) = {} & \alpha \cdot (\beta(x_1 + x_2), \beta x_2), \\
= {} & (\alpha\beta(x_1 + x_2) + \alpha\beta x_2, (\alpha\beta)x_2), \\
= {} & (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Exercice 2.2. *Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?*

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$.

2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = -4\}$,

3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 6y + 2z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$,

4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 6y + 2z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$.

Correction

1. On trouve ici l'équation d'un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Faire les calculs pour s'en convaincre, en vérifiant que l'ensemble est non vide et qu'il est stable par combinaison linéaire.
2. On trouve ici l'équation d'un hyperplan **affine** de $\mathbb{R}^3$, **ce n'est donc pas** un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   En effet, le vecteur $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ n'appartient pas à l'ensemble.
3. L'ensemble E_3 ainsi défini s'écrit comme l'intersection de autres sous-ensembles. Or ces deux sous-ensembles sont des hyperplans de $\mathbb{R}^3$ et nous avons vu que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels reste un espace vectoriel.
4. Dans le cas présent, nous ne pouvons pas utiliser un théorème du cours. En général l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel. On va donc chercher un contre exemple.
   Le vecteur $(2,1,0)$ appartient à l'espace $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 6y + 2z = 0\right\}$ et le vecteur $(1,2,0)$ appartient à l'espace $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\right\}$.
   Cependant le vecteur $(2,1,0) + (1,2,0) = (3,3,0)$ n'est ni élément de F, ni un élément de G, ce n'est donc pas un élément de $F \cup G$.