# Algèbre Linéaire et Analyse de Données

# Devoir Personnel
# Licence 2 MIASHS (2022-2023)

**Guillaume Metzler**
**Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2**
**Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France**
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

**Résumé**

Pour rappel, ce devoir est facultatif et permettra de modifier votre note en fonction de ce que vous avez pu traiter dans ce devoir.
Il se compose de deux exercices et de deux problèmes qui sont deux à deux indépendants.
La qualité de la rédaction et la clarté des explications sera prise en compte dans l'évaluation de votre travail.
Bien évidemment, vous avez le droit d'utiliser tous les résultats qui ont été démontrés en cours sans démonstration, sauf si on vous demande explicitement de le montrer.

Quelques informations sur les exercices :

1. **Exercices :** Les deux exercices portent sur les notions de valeurs propres et de géométries. Plus précisément, le premier exercice se propore d'étudier une application linéaire quelconque. Dans le deuxième exercice, on se propose de travailler sur une forme quadratique et de déterminer la forme polaire associée afin de voir si elle définit bien un produit scalaire.
2. **Problèmes :** les deux problèmes sont indépendants. Le premier problème se propose d'étudier une application linéaire qui possède une certaine propriété et d'en déduire des propriétés sur son espace image et son noyau.

   Dans le deuxième problème, on travaillera sur des matrices dites stochastiques que l'on pourrait rencontrer en probabilités. On va essentiellement effectuer des calculs sur ces matrices et étudier les limites d'une suite de matrice.

   **Travail à rendre pour le dernier CM afin que ce dernier puisse être pris en compte.**

## 1 Exercice 1 : Décomposition spectrale et orthogonalité

On considère la matrice $A$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. La matrice $A$ est-elle inversible ?
2. Déterminer une base de l'image et du noyau.
3. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer une base des sous-espaces propres.
5. On note $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ les vecteurs propres associés aux différents sous-espaces propres. Déterminer le projeté orthogonal des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sur le vecteur $\mathbf{v}_0$.
6. La famille de vecteurs $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ forme-t-elle une famille orthogonale ?
7. A partir de la famille $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ construire une base orthogonale $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ à l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

## 2 Exercice 2 : Décomposition spectrale et orthogonalité

Soit la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivante

$$q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2, \text{ où } x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Déterminer $f$ la forme polaire associée à la forme quadratique $q$.
2. Démontrer que $f$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les valeurs propres de cette forme quadratique et les vecteurs propres associés.
4. On munit $\mathbb{R}^3$ de ce produit scalaire. Soient $u_1 = (-1, 1, 1), u_2 = (2, -2, 3)$ et $u_3 = (1, 3, 4)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Démontrer que $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Appliquer la méthode Gram-Schmidt aux vecteurs $(u_1, u_2, u_3)$ afin d'obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormée pour le produit scalaire $f$.

## Problème 1 : Etude d'une application linéaire

Dans tout cet exercice, on s'intéresse aux propriétés d'un endomorphisme $f$ sur un espace vectoriel réel $E$, vérifiant $f \circ f = \dfrac{1}{2}(f + Id_E)$. On notera $f \circ f = f^2$ dans tout l'exercice.

### Une somme directe intéressante

On note $p$ l'endormorphisme de $E$ défini par $p = \dfrac{2}{3}f + \dfrac{1}{3}Id_E$.

1. Montrer que $p$ est un projecteur.
2. Vérifier que $Im(p) = \{x \in E \mid f(x) = x\}$.
3. On note $q$ le projecteur sur $Ker(p)$ parallèlement à $Im(p)$. Exprimer $q$ comme combinaison linéaire de $f$ et de $p$.
4. En déduire que $E = Ker\,(f - Id_E) \oplus Ker\left(f + \dfrac{1}{2}Id_E\right)$.

### Un exemple concret.

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = \left(-2x + y + z; -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z; -3x + y + 2z\right)$.

1. Déterminer la représentation matricielle de l'endomorphisme $f$.
2. Déterminer une base de l'image et du noyau de l'endomorphisme $f$ et préciser leur dimension.
3. La matrice associée à $f$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
4. Prouver que $f^2 = \frac{1}{2}(f + id_{\mathbb{R}^3})$.
5. Déterminer $\ker(f - id)$ et $\ker\left(f + \frac{1}{2}id\right)$, et donner une base de chacun de ces deux noyaux.
6. Déterminer l'expression des projecteurs $p$ et $q$ tels que définis dans la première partie.
7. En déduire l'expression de $f^n$.

## Problème 2 : Etude d'une matrice stochastique

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si tous les coefficients de cette matrice sont positifs et si, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. On considérera dans ce problème qu'une suite de matrice $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A$ si chacun des coefficients $(A_k)_{i,j}$ a pour limite $A_{i,j}$ lorsque $k$ tend vers $+\infty$.

### Etude d'un exemple dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette section ,on va considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que $A^2 = aA + bI_2$.
2. Montrer que pour tout entier $n$, il existe des entiers $a_n$ et $b_n$ tels que $A^n = a_nA + b_nI_2$ [1].
3. On admettra que (on ne cherchera pas à montrer ce résultat) pour tout entier $n$, nous avons
$$a_n = \frac{6}{7}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) \text{ et } b_n = \frac{1}{7}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right).$$
Montrer que la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est une matrice stochastique.

### Etude d'un exemple dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

A partir de maintenant, on considère les matrices $B$ et $J$ définies par

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les puissances de la matrice $J$.
2. Ecrire $B$ comme une combinaison des matrices $I_3$ et $J$, et en déduire les puissances de la matrice $B$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. Montrer que la suite de matrices $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est une matrice stochastique.

### Etude générale des matrices stochastiques carrées d'ordre 2

On considère désormais une matrice stochastique $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$, où $(a, b) \in [0, 1]$.

1. Calculer $A^n$ dans le cas où $a = b = 1$ puis dans le cas où $a = b = 0$. Cela va nous permettre d'exclure deux cas particuliers pour la suite.
2. On considère le polynôme $P$ défini par $P(X) = (X - 1)(X - a - b + 1)$. Calculer $P(A)$.
3. On admettra, pour la suite que l'on a
$$X^n = PQ + a_nX + b_nI_2.$$
où $Q$ est un polynôme inconnu (ce n'est pas important pour la suite) et que les coefficients $a_n$ et $b_n$ sont donnés par :
$$a_n = \frac{(a+b-1)^n - 1}{a+b-2} \text{ et } b_n = \frac{a+b-1+(a+b-1)^n}{a+b-2}.$$

1. On pourra montrer le résultat par récurrence sur $n$.

4. En déduire les puissances de la matrice $A$.
5. Montrer que la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est une matrice stochastique.

### Une étude plus générale (difficile)

On considère désormais une matrice stochastique (à $n$ lignes et $n$ colonnes) dont tous les coefficients sont strictement positifs. On note $m$ le plus petit coefficient de $A$; $\alpha_j^{(p)}$ le plus petit coefficient de la colonne numéro $j$ de la matrice $A^p$, et $\beta_j^{(p)}$ le plus grand coefficient de cette même colonne. Enfin, on note $\delta_j^{(p)} = \beta_j^{(p)} - \alpha_j^{(p)}$.

1. Montrer que si la suite $(A^p)$ converge, sa limite $B$ est une matrice stochastique, et vérifie $B^2 = B$ et $BA = AB$.

2. Montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1; \dots ; n\}, \alpha_j^{(p)} \leqslant \alpha_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p)}$, et $\delta_j^{(p+1)} \leqslant (1-2m)\delta_j^{(p)}$.

3. En déduire que la suite $(A^p)$ converge. Que peut-on dire des lignes de la matrice limite $B$ ?

4. Déterminer la limite de la suite $(A^p)$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ (on pourra exploiter le fait que $A$ est une matrice symétrique).