Algèbre Linéaire et Analyse de Données

Examen 2022 - 2023, Durée : 2h00
Licence 2 MIASHS

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Une feuille A4 manuscrite avec vos notes personnelles est autorisée.

En revanche, l'usage de calculatrice ou de tout autre matériel électronique est interdit.

Résumé

L'examen est volontairement long afin de donner l'opportunité à chacun de trouver des questions qu'il puisse faire pendant le temps imparti.
En outre, il permettra de faire une meilleure distinction entre les étudiants.
A ce titre, il n'est bien sûr pas attendu à ce que vous traitiez tous les exercices !

Les différents exercices qui composent cet examen sont indépendants. La qualité de la rédaction ainsi que les justifications apportées pour répondre aux différentes questions seront en compte de l'évaluation de la copie.

Exercice 1

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $\mathbf{x} \in^3$ par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 - 2x_2 - 2x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3, -2x_1 - 2x_2 - x_3).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f, puis en déduire son image (sans calcul).
3. Déterminer une base de $F = Ker(f - Id)$ et de $G = Ker(f + Id)$.
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
5. Vérifier que les espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
6. Que peut-on dire de l'application f ?

Exercice 2

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On définit la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ On note enfin $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base.
2. Quelle est la dimension de F ?
3. Montrer que F est stable par multiplication, *i.e.* que pour tout $A, B \in F^2$, $AB \in F$.
4. Montrer que pour toute matrice $M \in F$, si M est inversible, alors $M^{-1} \in F$.
5. Pour toute matrice M de F, on note $f(M) = TMT$. Montrer que f est un endomorphisme de F.
6. Vérifier que T est inversible et donner une condition pour que f soit un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ un espace vectoriel dont les éléments sont notés $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Considérons la famille de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer un vecteur $\mathbf{v}_3$ tel que la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ forme une famille orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Déterminer la norme de ces différents vecteurs.

   (d) Déterminer l'espace orthogonal au vecteur $\mathbf{v}_1$ dans $\mathbb{R}^3$, *i.e.* l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux au vecteur $\mathbf{v}_1$.

   (e) On considère maintenant le vecteur $\mathbf{w}$ défini par

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $\mathbf{w}$ sur $\mathbf{v}1$ et $\mathbf{v}2$.

2. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2$$

   (a) Montrer que l'application ϕ définit un produit scalaire.
   (b) Déterminer la forme quadratique associée et la matrice associée à l'application ϕ.
   (c) La forme quadratique est-elle définie positive ?

Exercice 4

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

1. La matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -0.5 \\ 0 & 4 & 2 \\ -0.5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice C de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

On considère les matrices A et P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer $P^{-1}AP$. On notera D la matrice obtenue.
3. Montrer que pour tout entier n on a

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

4. En déduire les puissances de la matrice A, pour tout $n \geq 0$.
5. Exprimer A^3 en fonction de A^2 et de A. En déduire que la matrice A n'est pas inversible.
6. Résoudre l'équation matricielle $N^3 = D$, en admettant que ses solutions N sont nécessairement des matrices diagonales.

Exercice 6

Soit $E = \mathbb{R}^4$ un espace vectoriel et considérons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la représentation matricielle est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de f.
2. Déterminer les vecteurs propres de f.
3. On notera $\mathbf{u}$ le vecteur propre associé à la valeur propre 1, $\mathbf{v}$ le vecteur propre associé à la valeur propre 2.

   On considère également les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ définis par

   $$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que l'on

   $$f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad \text{et} \quad f(\mathbf{y}) = 2\mathbf{y} + \mathbf{x}$$

4. Démontrer que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice de f dans cette base.
5. La matrice A est-elle diagonalisable ?