Algèbre Linéaire et Analyse de Données

Examen 2022 - 2023, Durée : 2h00
Licence 2 MIASHS

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Une feuille A4 manuscrite avec vos notes personnelles est autorisée.

En revanche, l'usage de calculatrice ou de tout autre matériel électronique est interdit.

Résumé

L'examen est volontairement long afin de donner l'opportunité à chacun de trouver des questions qu'il puisse faire pendant le temps imparti.
En outre, il permettra de faire une meilleure distinction entre les étudiants.
A ce titre, il n'est bien sûr pas attendu à ce que vous traitiez tous les exercices !

Les différents exercices qui composent cet examen sont indépendants. La qualité de la rédaction ainsi que les justifications apportées pour répondre aux différentes questions seront en compte de l'évaluation de la copie.

Exercice 1

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $\mathbf{x} \in^3$ par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 - 2x_2 - 2x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3, -2x_1 - 2x_2 - x_3).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   Il s'agit essentiellement de vérifier que f est une application linéaire. Pour cela, notons que pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned} f(x + \lambda\mathbf{y}) = \ & (-(x_1 + \lambda y_1) - 2(x_2 + \lambda y_2) - 2(x_3 + \lambda y_3), 2(x_1 + \lambda y_1) + 3(x_2 + \lambda y_2) + 2(x_3 + \lambda y_3), \\ & -2(x_1 + \lambda y_1 - 2(x_2 + \lambda y_2) - (x_3 + \lambda y_3)), \\ = \ & (-x_1 - 2x_2 - 2x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3, -2x_1 - 2x_2 - x_3) \\ & + \lambda(-y_1 - 2y_2 - 2y_3, 2y_1 + 3y_2 + 2y_3, -2y_1 - 2y_2 - y_3), \\ = \ & f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

   Ainsi f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Il s'agit donc d'un endormorphisme.

2. Déterminer le noyau de f, puis en déduire son image (sans calcul).

   On rappelle que le noyau de f est l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x}$ qui vérifient $f(\mathbf{x}) = 0$. Cela nous amène à résoudre le système

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 & = & 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 0. \end{cases}$$

   En sommant les deux première équations et les deux dernières équations, on trouve respectivement $x_1 + x_2 = 0$ et $x_2 + x_3 = 0$. On a donc $x_1 = -x_2$ et $x_3 = -x_2$. En injectant cela dans la deuxième équation, on trouve alors $x_2 = 0$ et il s'ensuit que x_1 et x_3 sont également nuls.

   L'application f est donc injective.

   Comme f est un injective, le théorème du rang nous assure que l'image de f est l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier.

3. Déterminer une base de $F = Ker(f - Id)$ et de $G = Ker(f + Id)$.

   Pour trouver une base de F, on doit chercher l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x}$ qui vérifient $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, soit résoudre le système

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 & = & x_1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & x_2, \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 & = & x_3. \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 & = & 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 & = & 0. \end{cases} .$$

   Les trois équations sont identiques. Notre système peut donc s'écrire

$$\{x_1 + x_2 + x_3 \quad = \quad 0.$$

   Notre système admet donc un espace de solutions engendré par les vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -1)$. L'espace F est donc de dimension 2.

De la même façon, pour trouver une base de G, on doit chercher l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x}$ qui vérifient $f(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$, soit résoudre le système

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 & = & -x_1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & -x_2, \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 & = & -x_3. \end{cases} \iff \begin{cases} -x_2 - x_3 & = & 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0, . \\ -x_1 + -x_2 & = & 0. \end{cases}$$

La première équation, nous donne $x_2 = -x_3$ et la dernière nous donne $x_1 = -x_2 = x_3$. On remarque aussi que la deuxième équation est redondante. Notre système admet donc un espace de solutions engendré par les vecteurs $(1, -1, 1)$ L'espace G est donc de dimension 1.

4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

   La réponse est oui, la question précédente a montré que les sous espaces propres F et G associés aux valeurs propres 1 et -1 sont de dimensions 2 et 1 respectivement. La somme de la dimension des sous-espaces propres est égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$, donc f est diagonalisable.

5. Vérifier que les espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

   On déjà

$$dim(F) + dim(G) = dim(\mathbb{R}^3).$$

   Il nous reste à vérifier que l'intersection de ces deux sous-espaces est bien réduite au vecteur nul. Ce qui est le cas car si $\mathbf{x}$ est un élément de $F \cap G$, il vérifie $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ et $f(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ soit $\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ qui admet comme unique solution le vecteur nul.

6. Que peut-on dire de l'application f ?

   Par définition l'application f est une symétrie d'axe F parallèlement à G.

Exercice 2

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On définit la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ On note enfin $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base.

   F est un sous ensemble non vide de E car $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$.

   De plus, pour tout $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons

$$+\lambda \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 & x_2 + \lambda y_2 \\ 0 & x_3 + \lambda y_3 \end{pmatrix} \in F.$$

   Une base de cet espace vectoriel est donnée par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Quelle est la dimension de F ?

   D'après la question précédente, l'espace F est un espace de dimension 3.

3. Montrer que F est stable par multiplication, *i.e.* que pour tout $A, B \in F^2$, $AB \in F$.

   On se donne deux matrices $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ comme à la question 2. et on effectue le produit, ce qui nous donne :
$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 + x_2 y_3 \\ 0 & x_3 y_3 \end{pmatrix} \in F.$$

4. Montrer que pour toute matrice $M \in F$, si M est inversible, alors $M^{-1} \in F$.

   Soit M la matrice de F donnée par $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ qui est inversible si a et c sont non nuls. Dans cas, l'inverse de la matrice M est donnée par
$$M^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$
   Cette dernière est donc bien un élément de F également.

5. Pour toute matrice M de F, on note $f(M) = TMT$. Montrer que f est un endomorphisme de F.

   f est clairement une application de F dans F car F est stable par multiplication, elle est également linéaire. En effet, soit $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$f(\mathbf{X} + \lambda \mathbf{Y}) = T(\mathbf{X} + \lambda \mathbf{Y})T = T(\mathbf{X})T + \lambda T(\mathbf{Y})T = f(\mathbf{X}) + \lambda f(\mathbf{Y}).$$

6. Vérifier que T est inversible et donner une condition pour que f soit un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   La matrice T est inversible car son déterminant est égal à 1. De plus, pour que f soit un automorphisme, il faut que TMT soit inversible pour toute matrice M non nulle, *i.e.* il faut que M soit inversible, il faudra donc restreindre l'application f à l'ensemble des matrices inversibles de F pour que cette dernière soit un automorphisme.

Exercice 3

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ un espace vectoriel dont les éléments sont notés $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Considérons la famille de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Déterminer un vecteur $\mathbf{v}_3$ tel que la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ forme une famille orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la norme de ces différents vecteurs.
   (d) Déterminer l'espace orthogonal au vecteur $\mathbf{v}_1$ dans $\mathbb{R}^3$, *i.e.* l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux au vecteur $\mathbf{v}_1$.
   (e) On considère maintenant le vecteur $\mathbf{w}$ défini par
$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $\mathbf{w}$ sur $\mathbf{v1}$ et $\mathbf{v2}$.

2. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2$$

   (a) Montrer que l'application ϕ définit un produit scalaire.
   (b) Déterminer la forme quadratique associée et la matrice associée à l'application ϕ.
   (c) La forme quadratique est-elle définie positive ?

Exercice 4

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

1. La matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -0.5 \\ 0 & 4 & 2 \\ -0.5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice C de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

On considère les matrices A et P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer $P^{-1}AP$. On notera D la matrice obtenue.
3. Montrer que pour tout entier n on a

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

4. En déduire les puissances de la matrice A, pour tout $n \geq 0$.
5. Exprimer A^3 en fonction de A^2 et de A. En déduire que la matrice A n'est pas inversible.
6. Résoudre l'équation matricielle $N^3 = D$, en admettant que ses solutions N sont nécessairement des matrices diagonales.

Exercice 6

Soit $E = \mathbb{R}^4$ un espace vectoriel et considérons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la représentation matricielle est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de f.
2. Déterminer les vecteurs propres de f.
3. On notera $\mathbf{u}$ le vecteur propre associé à la valeur propre 1, $\mathbf{v}$ le vecteur propre associé à la valeur propre 2.

   On considère également les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ définis par

   $$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que l'on

   $$f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad \text{et} \quad f(\mathbf{y}) = 2\mathbf{y} + \mathbf{x}$$

4. Démontrer que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice de f dans cette base.
5. La matrice A est-elle diagonalisable ?