Algèbre Linéaire et Analyse de Données

Examen 2021 - 2022, Session de Rattrapage
Licence 2 MIASHS

Guillaume Metzler

Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France

guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

Aucun matériel électronique n'est autorisé pour cet examen. Vous avez cependant le droit à une feuille manuscrite A4 (recto-verso) avec vos notes personnelles.

Tous les exercices de cet examen sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1

Soit un E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. On considère aussi E' un espace vectoriel de dimension finie m et u une application linéaire de E dans E'.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

1. $0_E \in F$.
2. Si $\mathbf{x} \in F$, alors $2\mathbf{x} \in F$.
3. Si $\mathbf{x} \in F$ et $\mathbf{y} \in E \setminus F$ alors $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in E \setminus F$.
4. Si $\mathbf{x} \in E \setminus F$ et $\mathbf{y} \in E \setminus F$ alors $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in E \setminus F$.
5. Si $\mathbf{x} \in E \setminus F$ alors $2\mathbf{x} \in E \setminus F$.
6. $E \setminus F$ est un sous-espace vectoriel de E.
7. La dimension de F est nécessairement strictement plus petite que celle de E.
8. Si $m > n$, alors l'application u est nécessairement injective ?
9. Si $m = n$, alors l'application u est surjective si et seulement elle est injective.
10. L'image de l'application u est forcément de dimension inférieure ou égale à n.
11. Une base de E contient exactement n vecteurs.
12. Si $m < n$ alors l'application est nécessairement surjective.

Exercice 2

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Justifier votre réponse.

1. La matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice C de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

On considère la matrice Msuivante , dans une base $\mathscr{B}$, dont les différents colonnes sont notées $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ et $\mathbf{c}_4$:

$$M = Mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -3 \\ 10 & 4 & 5 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Enoncer le théorème du rang
2. Déterminer l'application linéaire u associée à la matrice M, vous prendrez soin de préciser la dimension de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée.
3. Déterminer le noyau de l'application u et sa dimension. En déduire la dimension de l'espace image.
4. Déterminer la norme euclidienne du vecteur $\mathbf{c}_3$.
5. Déterminer la norme de Frobenius de la matrice M.
6. Déterminer les valeurs singulières de la matrice M.
7. Quel est le lien entre les valeurs singulières de M et sa norme de Frobenius ?
8. Déterminer la projection de des vecteurs $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$ sur le vecteur $\mathbf{c}_3$

Exercice 4

On considère un jeu de données dont la matrice est donnée comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -3 \\ 10 & 4 & 5 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, chaque ligne de cette matrice représente un individu et chaque colonne représente une variable (*i.e.* une information) qui permet de d'écrire les individus.

1. Quel est le nombre d'individus et de variables dans ce jeu de données ?
2. Déterminer l'individu moyen, *i.e.* le barycentre du nuage de points associé.
3. Quelles sont les étapes de préparation du jeu de données qui sont essentielles à la réalisation d'une ACP ?
4. Expliquez avec vos mots le principe de l'ACP.
5. Quelle matrice serez vous amenés à analyser si vous souhaitez étudier le nuage de points des individus ? De même si vous souhaitez analyser le nuage des variables ?

Exercice 5

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$

1. Donner l'expression analytique de q dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ et expliciter sa forme polaire, *i.e.* déterminer l'expression de $q(\mathbf{x})$ et celle de $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ où ϕ désigne la forme polaire associée.
2. Vérifier que la famille $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ définie par
$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$
est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice A' de q dans cette base.
3. Expliciter q dans cette base.
4. Déterminer le projection du vecteur $\mathbf{e}'_2$ sur le vecteurs $\mathbf{e}'_1$ puis sur le vecteur $\mathbf{e}'_3$.