Algèbre Linéaire et Analyse de Données

Session 2, Durée : 1h30
Licence 2 MIASHS

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

L'usage de calculatrice ou de tout autre matériel électronique est interdit. L'usage de notes personnelles mais aussi des notes de cours n'est pas autorisé pour cet examen.

Résumé

Les différents exercices qui composent cet examen sont indépendants. La qualité de la rédaction ainsi que les justifications apportées pour répondre aux différentes questions seront en compte de l'évaluation de la copie. Il est demandé de bien faire mention de l'exercice ainsi que de la question traitée afin que la réponse soit prise en compte. Dans le cas contraire, cette dernière ne sera pas prise entraînement la note de 0 pour cette question ou cet exercice.

Questions de cours

On considère $\mathbf{A}$ une matrice carrée d'ordre n. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse :

1. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.
2. Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable alors $\mathbf{A}^2$ est aussi diagonalisable.
3. Si $\mathbf{A}^2$ est diagonalisable alors $\mathbf{A}$ est aussi diagonalisable.
4. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension impaire admet au moins une valeur propre (réelle).
5. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Exercice 1

1. Rappeler la définition de famille libre, famille génératrice et de base si l'on se place dans un espace vectoriel de dimension finie n.
2. On considère un espace vectoriel de dimension 3. Montrer que les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (0,1,1), \mathbf{u}_2 = (1,0,1)$ et $\mathbf{u}_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les coordonnées du vecteur $\mathbf{u} = (1,1,1)$ dans cette base.

Exercice 2

Dans cet exercice, on considère un endomorphisme représentée par une matrice A et une matrice P respectivement définies par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable ? On notera D la matrice diagonale associée
3. Déterminer une relation entre les matrices A, D et P.
4. En déduire la valeur de A^n pour tout entier n.
5. Exprimer A^3 en fonction de A^2 et A et en déduire que la matrice A n'est pas inversible.
6. Résoudre l'équation matricielle $N^3 = D$ en admettant que les solutions sont nécessairement des matrices diagonales.

Exercice 3

1. Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Considérons la famille de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \text{et } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer un vecteur $\mathbf{v}_3$ tel que la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ forme une famille orthogonale de $\mathbb{R}^3$,*i.e.* déterminer l'expression de $q(\mathbf{x})$ et celle de $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ où ϕ désigne la forme polaire associée.

(b) Déterminer l'espace orthogonal au vecteur $\mathbf{v}_1$ dans $\mathbb{R}^3$, *i.e.* l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux au vecteur $\mathbf{v}_1$.

2. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2$$

   (a) Montrer que l'application ϕ définit un produit scalaire.

   (b) Déterminer la forme quadratique associée et la matrice associée à l'application ϕ.

   (c) La forme quadratique est-elle définie positive ?

Exercice 4

On considère un jeu de données dont la matrice est donnée comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -3 \\ 10 & 4 & 5 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, chaque ligne de cette matrice représente un individu et chaque colonne représente une variable (*i.e.* une information) qui permet de d'écrire les individus.

1. Quel est le nombre d'individus et de variables dans ce jeu de données ?
2. Déterminer l'individu moyen, *i.e.* le barycentre du nuage de points associé.
3. Quelles sont les étapes de préparation du jeu de données qui sont essentielles à la réalisation d'une ACP ? On prendra soin de préciser les transformations mathématiques effectuées.
4. Expliquez avec vos mots le principe de l'ACP.
5. Quelle matrice serez vous amenés à analyser si vous souhaitez étudier le nuage de points des individus ? De même si vous souhaitez analyser le nuage des variables ? Que peut-on dire de leurs valeurs propres ?