Analyse I

Examen - 1ère Partie
Licence 1 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Durée : 1h00

Il est demandé de rendre le sujet à la fin.

L'usage des notes de cours, des notes personnelles ou encore de tout matériel électronique est interdit pendant toute la durée de cet examen

Résumé

Cet examen se compose de deux exercices qui reprennent le contenu des premières séances de cours.

Les deux exercices sont indépendants et valent tout deux le même nombre de points.

La qualité de la rédaction se prise en compte dans la notation. Ainsi, une bonne réponse non justifiée n'apportera pas la totalité des points.

Exercice 1 : Etude d'une suite

L'objectif de cet exercice est d'étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telles que pour tout $n > 0$

$$(n+1)^2 u_{n+1} - n^2 u_n = f(n), \tag{1}$$

où f est une fonction définie pour tout entier n non nul et $u_1 \in \mathbb{R}$.

Les suites considérées dans cet exercice seront toutes définies dans sur $\mathbb{N}^\star$ mais nous étudierons uniquement un exemple dans le cas où $f(n) = 2n+1$

1. On suppose, dans cette question que $u_1 = 1$.
   (a) Calculer la valeur de u_2 et u_3 en utilisant la définition de f et la relation (1).

   La relation de récurrence (1) peut s'écrire

   $$u_{n+1} = \frac{f(n) + n^2 u_n}{(n+1)^2}.$$

   On a donc :

   $$u_2 = \frac{f(1) + u_1}{4} = \frac{3+1}{4} = 1.$$

   $$u_3 = \frac{5+4}{9} = 1.$$

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante dont on précisera la valeur.

   Les premières valeurs de la suite semblent suggérer que cette dernière est constante est égale à 1. La relation est donc vraie au rang $n = 1$.

   Supposons que la relation est vraie au rang n. La relation (1), nous donne

   $$u_{n+1} = \frac{f(n) + n^2 u_n}{(n+1)^2}$$

   En utilisant l'expression de f et la relation de récurrence, on trouve

   $$u_{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)^2} = 1.$$

   La relation reste donc vraie au rang $n+1$ et est donc vraie pour tout n.

2. On suppose maintenant que $u_1 > 1$.
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de n et de u_n.

   La relation de récurrence (1) peut s'écrire

   $$u_{n+1} = \frac{2n + 1 + n^2 u_n}{(n+1)^2}.$$

(b) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_n > 1$.

Cela est immédiat à l'aide de la relation précédente. La récurrence se fait de la même façon que lors de la question précédente et on utilisera le fait que si $u_n > 1$ (sachant que cela est vraie au rang $n = 1$), alors

$$u_{n+1} > \frac{2n+1+n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.

On va simplement chercher à évaluer la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2n+1+n^2u_n}{(n+1)^2} - u_n, \\ &= \frac{2n+1+n^2u_n - (n^2+2n+1)u_n}{(n+1)^2}, \\ &= \frac{(2n+1)(1-u_n)}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Or $2n+1$ et $(n+1)^2$ sont strictement positifs pour tout entier n et $1 - u_n < 0$ d'après la question précédente. La différence est donc négative, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc décroissante.

(d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge. Que peut-on dire de sa limite (on ne cherchera pas à la calculer explicitement).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1, elle est donc convergente. A pourrait même supposer que la limite de cette suite est égale à 1, ce que l'on cherchera à montrer dans les prochaines questions.

(e) Montrer, par récurrence, que pour tout entier $n > 0$, nous avons

$$0 \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{n^2}(u_1 - 1).$$

L'inégalité de gauche découle directement du fait que pour tout n, $u_n > 1$.
Pour l'inégalité de droite, on procédera par récurrence (on a évidemment $u_1 - 1 \leq u_1 - 1\,!$).
Supposons l'inégalité vraie au rang n, alors

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2n+1+n^2u_n}{(n+1)^2} - 1 = \frac{n^2}{(n+1)^2}u_n - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2}(u_n - 1).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence $u_n - 1 \leq \frac{1}{n^2}(u_1 - 1)$, d'où

$$u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{(n+1)^2}(u_1 - 1).$$

La relation reste donc vraie au rang $n+1$ et est donc vraie pour tout entier n.

(f) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité précédente nous donne directement une limite égale à 1 pour la suite étudiée.

3. On suppose toujours que $u_1 > 1$ et on se propose de déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ d'une autre façon.

   (a) On pose $v_n = n^2 u_n$. Déterminer une relation entre v_{n+1}, v_n et n.

   On a trivialement $v_{n+1} - v_n = f(n)$, en utilisant la relation (1).

   (b) En déduire que pour tout entier $n > 0$, on a $v_n = n^2 - 1 + u_1$.

   On peut refaire une récurrence. Observons que l'on a bien $u_1 = v_1$. De plus

   $$v_{n+1} = 2n + 1 + v_n = 2n + 1 + n^2 - 1 + u_1 = (n+1)^2 - 1 + u_1.$$

   Ce qui achève la démonstration par récurrence.

   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

   On sait que $u_n = \dfrac{v_n}{n^2} = 1 + \dfrac{u_1 - 1}{n^2}$. Puisque $u_1 - 1$ est constant, on a directement

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Exercice 2 : Etude des fonctions hyperboliques

On considère la fonction th définie par

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Dans cet exercice, on cherchera à étudier cette fonction et montrer quelques relations sur cette dernière.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction th ainsi que l'ensemble sur lequel elle est dérivable et déterminer sa dérivée.

   Pour tout réel x, $e^x + e^{-x} > 1$, la fonction th est donc définie et dérivable pour tout réel x. La dérivée de cette fonction est donnée par :

   $$\mathrm{th}'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

   Il s'agit d'une simple application de la dérivation du quotient de deux fonctions dérivables.

2. Montrer que pour tout réel x, nous avons

   $$-1 \leq \mathrm{th}(x) \leq 1.$$

   Notons que pour tout réel x

   $$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \leq \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \leq 1.$$

   De la même façon

   $$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \geq -\frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \geq -1.$$

3. Montrer que, pour tout réel x, nous avons les relations suivantes

   $$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

   Il faut calculer la dérivée explicitement. On pourra utiliser le fait que $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

   Ainsi $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$. Mais en reprenant la première égalité, et en utilisant le fait que pour tout x, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$, on a directement $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}$.

4. Etudier les limites de cette fonction en les bornes de son intervalle de définition et dresser le tableau de variation.

   Notons que

   $$\lim_{x \to +\infty} e^x + e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} e^x - e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} e^x$$

   et que

   $$\lim_{x \to -\infty} e^x + e^{-x} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x}, \text{ et } \lim_{x \to -\infty} e^x - e^{-x} = \lim_{x \to -\infty} -e^{-x}.$$

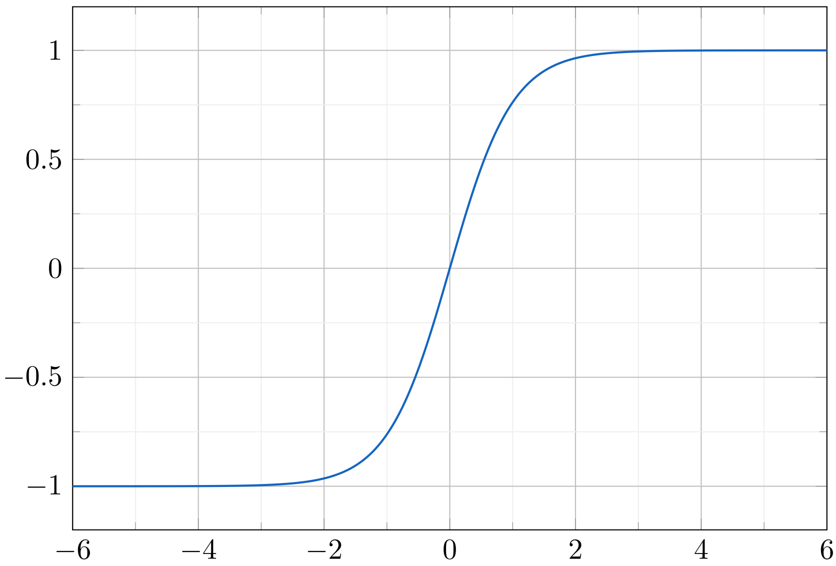
Ainsi

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th}(x) = -1, \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x) = 1.$$

On peut ainsi dresser le tableau des variations suivant

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{th}'(x)$		$+$	
th	-1	0	1

5. Représenter graphiquement cette fonction



6. Montrer que la fonction th est bijective. On notera argth sa fonction réciproque.

   La fonction th est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$, elle est donc bijective et admet donc une réciproque définie de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.

7. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, nous avons

$$\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

   Indication : pour tout $x \in]-1,1[$, on posera $x = \operatorname{th}(y)$, on cherchera alors à exprimer y en fonction x.

   Suivons les indications :

$$x = \operatorname{th}(y) \iff x\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \iff x(e^{2y}+1) = (e^{2y}-1) \iff e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \iff \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

8. Donner l'expression de la dérivée de cette fonction.

   Le plus simple est de réécrire le logarithme du quotient, comme une différence de logarithme pour le calcul de la dérivée.

   Ainsi, on trouve que pour tout $x \in]-1,1[$, nous avons :

$$\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{1-x^2}.$$