Analyse I

Devoir Maison
Licence 1 Informatique (2024-2025)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Travail à rendre le 24 avril 2025

Résumé

Ce devoir se compose de deux exercices qui sont indépendants et traitent de l'ensemble des notions abordées en cours : suites - généralités sur les fonctions circulaires et hyperboliques ou encore les notions de dérivations. Il comporte aussi un problème sur l'étude d'une fonction et de sa primitive. Il se peut même que les exercices mélanges ces différentes notions.

Le premier exercice se propose d'étudier des fonctions définies à partir de fonctions circulaires et hyperboliques puis de résoudre certaines équations et inéquations.

La deuxième exercice traite se propose d'étudier des suites adjacentes ainsi que les propriétés de plusieurs suites annexes.

Le troisième exercice est un problème qui vous propose d'étudier les courbes représentatives d'une fonction et de sa primitive

Exercice 1 : Fonctions circulaires et hyperboliques

Dans cet exercice, on considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin(x) + \text{ch}(x), \quad g(x) = \tan(x) - \text{sh}(x), \quad \text{et} \quad h(x) = \text{arsinh}(\cos(x))$$

On commence par étudier la fonction f.

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x)$.
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.
3. Étudier les variations de $f(x)$ et en déduire son tableau de variations.
4. Étudier la parité de $f(x)$.
5. Étudier la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$.

On se propose maintenant d'étudier la fonction g.

1. Préciser le domaine de définition de $g(x)$.
2. Calculer la dérivée $g'(x)$.
3. Étudier les asymptotes éventuelles de $g(x)$.
4. Vérifier que $g(0) = 0$ et interpréter graphiquement cette propriété.

On poursuit cette exercice avec l'étude de la fonction h.

1. Justifier que $h(x)$ est bien définie sur son domaine.
2. Exprimer $h(x)$ en termes de logarithme.
3. Calculer la dérivée $h'(x)$ et en déduire une interprétation géométrique.

Dans cette dernière partie, on se propose de résoudre quelques équations et inéquations sur ces fonctions circulaires et hyperboliques.

1. Résoudre l'équation $\cosh x = 2 \sin x$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'inéquation $\sinh x > \cos x$.
3. Montrer que l'équation $\tan x = \sinh x$ admet au moins une solution.

Exercice 2 : Étude d'une Suite Adjacente

On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

1. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Justifier que les suites sont adjacentes.

3. Déterminer la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Définir la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = v_n - u_n$ et étudier son comportement.
5. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donner son expression explicite.
6. Étudier la rapidité de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers leur limite.
7. Proposer une autre suite auxiliaire permettant d'approcher la limite et justifier son choix.

Problème : Etude d'une fonction et de son graphe

Dans cet exercice, on se place dans un plan muni d'un repère orthonormé, *i.e.*, le plan classique permettant d'effectuer les représentations graphiques classiques.

Partie A : Etude d'une fonction f et de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ définie par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2)$$

et on désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0.
2. Montre que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

   (a) Etudier les variations de u.

   (b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2,3]$. Dans la suite, on admettra que l'on a même $2.20 < \alpha < 2.21$.

   (c) Etudier le signe de $u(x)$.
4. Retour à la fonction f

   (a) Etudier les variations de la fonction f.

   (b) Exprimer $\ln(\alpha)$ comme un polynôme en α. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.
5. On s'intéresse maintenant au graphe de la fonction f.

   (a) Etudier le signe de la fonction f.

   (b) Tracer $\mathcal{C}_f$.

Partie B : Etude d'une primitive de f sur $]0,+\infty[$

Soit F la primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en $x = 1$. On appelle $\mathcal{C}_F$ la corube représentative de F.

1. Etude de F

   (a) Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0,+\infty[$.

   (b) Que peut-on dire des tangentes à $\mathcal{C}_F$ aux points d'abscisses 1 et e^2.
2. Calcul de $F(x)$

(a) Vérifier que la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est la primitive de la fonction ln qui s'annule en e.

(b) Montrer pour tout réel x strictement positif, on a

$$f(x) = \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} - 2.$$

(c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

3. Etude de la courbe représentative de F.

   (a) Déterminer la limite de F en 0.

   (b) Montrer que pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a

   $$F(x) = x\ln(x)\left(1 - \frac{\ln(x)}{2x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln(x)}\right) + 3.$$

   En déduire la limite de F en $+\infty$.

   (c) Dresser le tableau de variation de F.

   (d) Tracer $\mathcal{C}_F$ sur le même graphique que $\mathcal{C}_f$.

4. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.