Analyse I

Devoir Maison
Licence 1 Informatique (2025-2026)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Travail à rendre lors de la dernière séance de TD, *i.e.*, le jour de l'examen

Résumé

Ce devoir se compose de trois exercices qui abordent l'ensemble des notions vues en cours. Ils ne sont pas forcément rangés par ordre de difficulté et ils sont tous indépendants.

Exercice 1

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^n dx$.

1. Montrer que I_n existe pour tout entier n, et calculer I_0 et I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite $(\ I_n\ )$.
3. Montrer que la suite $(\ I_n\ )$ converge vers une limite l vérifiant $l \geqslant 0$.
4. Montrer que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
5. En déduire que $l = 0$.
6. Montrer que $I_n \sim \frac{e}{n+1}$.

Exercice 2

On note f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln\left(1 + x^2\right)$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On pourra utiliser dans l'exercice la valeur approchée $\ln(2) \simeq 0.69$.

I. Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. En déduire les variations de la fonction f.

3. Calculer $f''(x)$ et résoudre l'équation $f''(x) = 0$.
4. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x)$, et effectuer l'étude locale de f en 0 .
6. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $f(x)$.
7. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère d'unité 2 centimètres, en précisant les tangentes à $\mathcal{C}$ à l'origine, ainsi qu'aux points dont les abscisses vérifient $f''(x) = 0$.
8. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x f(x) dx$ (on pourra effectuer le changement de variable $t = 1 + x^2$.

II. Étude de suites associées à f.

On considère la suite $(\ u_n\ )$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

1. Montrer que la suite $(\ u_n\ )$ est décroissante.
2. Montrer la convergence de la suite et déterminer sa limite.
3. Énoncer le théorème des accroissements finis, et l'appliquer à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ sur l'intervalle $[0, h]$, avec $h \in]0, 1\ ]$.
   (a) Établir que, $\forall x \in [0, 1], f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}x^2$.
   (b) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \leqslant 2\left(u_n - u_{n+1}\right)$.
   (c) En déduire que la suite (v_n) définie par $v_n = \sum_{k=0}^n u_k^2$ est une suite convergente.

Exercice 3

Dans un cadre d'apprentissage statistiques ou d'apprentissage machine (*Machine Learning* en anglais) nous sommes très souvent amenés à résoudre des problèmes via l'optimisation de fonctions de coûts qui représentent les erreurs de notre algorithme. Cette optimisation consiste à trouver des paramètres optimaux de nos modèles afin que ces derniers puissent résoudre le problème de façon efficace. La forme de cette fonction joue un rôle crucial dans la facilité d'optimisation.

Une étude de fonction convexe. On commence par étudier une fonction générale définie par

$$f(x) = x^2 + e^x$$

où $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée $f'(x)$, étudier son signe et dresser la tableau des variations de la fonction f.
2. En déduire que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$
3. Calculer la dérivée seconde $f''(x)$.
4. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
5. Expliquer en quoi, à votra avis, cette convexité est importante pour l'étude de la minimisation du taux d'erreur

On regarde rapidement une approximation du point optimal. Pour cela, on note x^* la valeur qui minimise f.

6. Montrer que x^* vérifie :
$$2x + e^x = 0$$
7. Justifier que cette équation admet une unique solution.
8. À l'aide d'un tableau de valeurs, encadrer x^* à 10^{-1} près.

Algorithme de descente de gradient. Pour optimiser des fonctions, on passe en générale par un algorithme dit de *descente de gradient* qui consiste à construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valeurs définies par la relation de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \alpha f'(x_n)$$

avec $\alpha = 0.1$ et $x_0 = 0$.

9. Calculer x_1, x_2, x_3 (arrondir à 10^{-3}).
10. Conjecturer le comportement de la suite (x_n).
11. Expliquer pourquoi la convexité de f est importante pour garantir l'efficacité de cette méthode.

On pourrait répéter l'ensemble des questions précédentes (en adaptant le format) pour une fonction plus classique en apprentissage machine qu'est la *loss logistique* définie par

$$f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x).$$

Cas d'une fonction non convexe. On souhaite maintenant observer ce qu'il se passe lorsque l'on étudie une fonction qui n'est pas convexe.

On considère maintenant la fonction :

$$g(x) = x^3 - 3x$$

12. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
13. Étudier les variations de g.
14. Cette fonction est-elle convexe sur $\mathbb{R}$?
15. Montrer qu'elle admet plusieurs extrema locaux.
16. Expliquer pourquoi ce type de fonction pose problème en optimisation.