Analyse II

Examen - 1ère Partie
Licence 2 Informatique (2023-2024)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Durée : 1h00

L'usage des notes de cours, des notes personnelles ou encore de tout matériel électronique est interdit pendant toute la durée de cet examen

Résumé

Cet examen se compose de deux exercices qui reprennent le contenu des premières séances de cours.

Les deux exercices sont indépendants et valent tout deux le même nombre de points.

La qualité de la rédaction se prise en compte dans la notation. Ainsi, une bonne réponse non justifiée n'apportera pas la totalité des points.

Exercice 1 : Etude d'extrema

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence et de caractériser la nature des points critiques de différentes fonctions.

1. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 y - 15x - 12y.$$

   Montrer que f n'admet pas d'extremum local.

2. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4.$$

   (a) Montrer que la fonction f est paire.
   (b) Montrer que f admet trois points critiques et donner leurs coordonnées.
   (c) Déterminer la nature des points critiques et déterminer le minimum global de la fonction f.

Exercice 2 : Etude d'une fonction

Soit γ un nombre réel et considérons la fonction $f_\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + (\gamma + 2)x_2^2 + 2\gamma x_1 x_2) + 6x_1 + 4x_2.$$

1. Montrer que f_γ peut s'écrire sous la forme

$$f_\gamma = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x},$$

   où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ sont respectivement une matrice et un vecteur dont on déterminera les valeurs.
2. Etudier la convexité de la fonction f_γ en fonction du paramètre γ.
3. Déterminer les points critiques de la fonction f_γ.
4. Déterminer la nature des points critiques.
5. On considère le vecteur de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{a} = (1, 1)$. Déterminer une approximation d'ordre 2 de f_γ au point $\mathbf{a}$.