Analyse II

Examen - 1ère Partie
Licence 2 Informatique (2023-2024)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Durée : 1h00

L'usage des notes de cours, des notes personnelles ou encore de tout matériel électronique est interdit pendant toute la durée de cet examen

Résumé

Cet examen se compose de deux exercices qui reprennent le contenu des premières séances de cours.

Les deux exercices sont indépendants et valent tout deux le même nombre de points.

La qualité de la rédaction se prise en compte dans la notation. Ainsi, une bonne réponse non justifiée n'apportera pas la totalité des points.

Exercice 1 : Etude d'extrema

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence et de caractériser la nature des points critiques de différentes fonctions.

1. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y.$$

Montrer que f n'admet pas d'extremum local.

Pour cela, nous devons d'abord déterminer les points critiques de la fonction f et montrer que cette dernière n'est ni convexe, ni concave en les points critiques.

Notons que la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale. Le gradient et le hessien de f sont respectivement donnés par

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 6xy - 15 \\ 3x^2 - 12 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 6y & 6x \\ 6x & 0 \end{pmatrix}$$

Les points critiques sont solutions de l'équation

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{0},$$

i.e., du système

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6xy - 15 &= 0, && (1) \\ 3x^2 - 12 &= 0. && (2) \end{aligned}$$

L'Equation (2) implique $x = 2$ ou $x = -2$. En injectant cela dans l'Equation (1), on trouve

- **pour** $x = 2$ **:** y est solution de l'équation $12 + 12y - 15 = 0$ soit $y = \dfrac{1}{4}$
- **pour** $x = -2$ **:** y est solution de l'équation $12 - 12y - 15 = 0$ soit $y = \dfrac{-1}{4}$

Donc les solutions sont $(x,y) = \left(2, \dfrac{1}{4}\right)$ ou $(x,y) = \left(-2, -\dfrac{1}{4}\right)$.
La trace et le déterminant de notre matrice hessienne sont respectivement égaux à

$$6x + 6y \quad \text{et} \quad -36x^2$$

Le déterminant est donc toujours négatif, ce qui indique les valeurs propres sont de signes opposés. Les points critiques ne sont donc pas des extrema.

2. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4.$$

(a) Montrer que la fonction f est paire.

On vérifié facilement que $f(-x,-y) = f(x,y)$ pour tout réel x, y.

En effet

$$
\begin{aligned}
f(-x,-y) = & -2(-x-(-y))^2 + (-x)^4 + (-y)^4, \\
= & -2((-1)(x-y))^2 + x^4 + y^4, \\
= & -2(x-y)^2 + x^4 + y^4, \\
= & \, f(x,y)
\end{aligned}
$$

(b) Montrer que f admet trois points critiques et donner leurs coordonnées.

La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale de x et y.
Le gradient de la fonction f est donnée par

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -4(x-y)+4x^3 \\ 4(x-y)+4y^3 \end{pmatrix}.$$

La gradient de la fonction f s'annule aux points (x,y) solutions du système suivant

$$
\begin{aligned}
-4(x-y)+4x^3 &= 0, & (3) \\
4(x-y)+4y^3 &= 0. & (4)
\end{aligned}
$$

En faisant la somme (3) + (4), on trouve l'équation $x^3+y^3=0$ soit $x=-y$.
En injectant cela dans l'une des équation restante, on trouve $2x-x^3=0$ soit $x=\pm\sqrt{2}$.

Ainsi, les solutions sont données par les couples

$$(x,y) \in \{(0,0), (\sqrt{2},-\sqrt{2}), (-\sqrt{2},\sqrt{2})\}.$$

(c) Déterminer la nature des points critiques et déterminer le minimum global de la fonction f.

On va, pour cela, déterminer et étudier la matrice hessienne de la fonction f. Cette dernière est donnée par

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -4+12x^2 & 4 \\ 4 & -4+12y^2 \end{pmatrix}$$

La trace et le déterminant de notre matrice hessienne sont respectivement égaux à

$$-8+12(x^2+y^2) \quad \text{et} \quad -48x^2-48y^2+144x^2y^2 = 48(3x^2y^2-x^2-y^2).$$

On peut déjà remarqué que cette fonction n'est globalement convexe ou concave et nous devrons donc étudier les points critiques localement pour en déterminer leur nature.
On va maintenant étudier les trois points critiques :

- **Point de coordonnées** $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$: en ce point, la trace de la matrice est égale à 40 e le déterminant est égale à $48 \times (12-2-2) > 0$.
  La fonction est donc localement convexe en ce point et il s'agit donc d'un minimum local de notre fonction.

- **Point de coordonnées** $(+\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: la fonction admet également un minimum local en ce point par parité de la fonction f.

- **Point de coordonnées** $(0, 0)$: en ce point la trace de la matrice hessienne est égale à -8 et sont déterminant est égal à 0.
  On pourrait être tenté de dire que le point est alors un maximum local, mais non, il ne s'agit pas d'un extremum.

  En effet, nous avons $f(0, 0) = 0$ et pour tout x non nul, on a $f(x, x) = 2x^4$, donc f prend des valeurs strictement supérieures à $f(0, 0)$ dans ce voisinage.
  De plus, on a $f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ sur l'intervalle $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\backslash\{0\}$. Donc f prend des valeurs strictement négatives sur ce voisinage là.

En fait, on peut même montrer que les deux premiers points critiques sont des minima globaux de f. En effet

$$\begin{aligned}
f(x,y) - f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = & -2(x-y)^2 + x^4 + y^4 - 8, \\
&= x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8, \\
&\downarrow \ (x^2+y^2)^2 \geq 0 \text{ soit } -(x^2+y^2) \leq -2xy \\
&\geq x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 2(x^2+y^2) + 8, \\
&= (x^4 - 4x^2 + 4) + (y^4 - 4y^2 + 4), \\
&= (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2, \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Exercice 2 : Etude d'une fonction

Soit γ un nombre réel et considérons la fonction $f_\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + (\gamma+2)x_2^2 + 2\gamma x_1 x_2) + 6x_1 + 4x_2.$$

1. Montrer que f_γ peut s'écrire sous la forme

   $$f_\gamma = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x},$$

   où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ sont respectivement une matrice et un vecteur dont on déterminera les valeurs.

   Il suffit de voir que la matrice $\mathbf{A}$ et le vecteur $\mathbf{b}$ (comme ce que nous avons vu en cours) sont donnés par

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \gamma+2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Etudier la convexité de la fonction f_γ en fonction du paramètre γ.

   On se rappelle que pour une telle forme, dite forme quadratique, la matrice hessienne de f_γ est égale à la matrice $\mathbf{A}$.
   La trace et le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$ sont donnés respectivement par

   $$\gamma + 3 \quad \text{et} \quad -\gamma^2 + \gamma + 2$$

La trace de la matrice est positive pour tout $\gamma \geq -3$ et le déterminant de la matrice est positif pour pour tout γ vérifiant

$$-\gamma^2 + \gamma + 2 \geq 0.$$

Etant donné le signe de ce polynôme du second degré en gamma, ce dernier est positif à l'intérieur de l'intervalle des racines qui sont respectivement égales à

$$\gamma_+ = -1 \quad \text{et} \quad \gamma_- = 2$$

Donc le déterminant est positif dans l'intervalle pour tout $\gamma \in [-1, 2]$.
Ainsi, la fonction est convexe pour tout $\gamma \in [-1, 2]$. Lorsque $-3 < \gamma < -1$, la trace est positive et le déterminant est négatif, donc la fonction n'est ni convexe, ni concave. Lorsque $\gamma < -3$, la trace est négative et le déterminant est négatif, donc la fonction n'est ni convexe, ni concave. Lorsque $\gamma > 2$, la trace est positive et le déterminant est négatif, donc la fonction n'est ni convexe, ni concave.

3. Déterminer les points critiques de la fonction f_γ.
On cherche les valeurs pour lesquelles le gradient de la fonction f_γ est égal à 0.

$$\nabla f_\gamma(x, y) = \mathbf{0} \iff \mathbf{A}\mathbf{x} = -\mathbf{b}.$$

Ce qui conduit à la résolution du système linéaire

$$\begin{aligned} x + \gamma y &= 6, \\ \gamma x + \gamma y + 2y &= 4. \end{aligned}$$

L'Equation (5) conduit à la relation $x = 6 - \gamma y$, ce qui, en injectant dans l'Equation (5), nous donne l'équation

$$6\gamma - \gamma^2 y + \gamma y + 2y = 0 \iff 6\gamma + y(-\gamma^2 + \gamma + 2) = 0$$

Ainsi, pour tout $\gamma \neq \{-1, 2\}$, on a

$$y = \frac{6\gamma}{\gamma^2 - \gamma - 2}$$

et donc $x = 6 + \dfrac{6\gamma^2}{\gamma^2 - \gamma - 2}$.
Enfin, lorsque $\gamma = 2$ ou $\gamma = -1$, le système n'admet pas de solutions.

4. Déterminer la nature des points critiques.

Il n'y a donc qu'un seul point critique et ce dernier est un minimum si $\gamma \in [-1, 2]$, sinon on ne peut pas conclure.

5. On considère le vecteur de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{a} = (1, 1)$. Déterminer une approximation d'ordre 2 de f_γ au point $\mathbf{a}$.

On ne se préoccupe pas de la valeur de γ dans le cas présent et on rappelle que la relation est donnée par

$$f(\mathbf{x}) \simeq f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \nabla^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Or

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{a}) &= 3\gamma + \frac{23}{2}, \\
\nabla f(\mathbf{a}) &= \begin{pmatrix} 7+\gamma \\ 2\gamma+6 \end{pmatrix}, \\
\nabla^2 f(\mathbf{a}) &= \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \gamma+2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nous avons ainsi

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) \simeq\ & 3\gamma + \frac{23}{2} + (7+\gamma)(x_1-1) + (2\gamma+6)(x_2-1), \\
& + (x_1-1)^2 + 2\gamma(x_1-1)(x_2-1) + (\gamma+2)(x_2-1)^2, \\
=\ & x_1^2 + 2\gamma x_1 x_2 - (3\gamma-5)x_1 + \gamma x_2^2 - x_1(2\gamma-2) + 5\gamma + \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$