Mathématiques et Statistiques appliquées à la Gestion

Correction Lab 1
BBA-1 (2021-2022)

Guillaume Metzler
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC EA3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Gestion des Services Ashland MultiComm

Dans cette première partie, le département des services techniques d'AMS a travaillé sur un projet visant a amélioré le service et la qualité d'accès à internet de ces clients, pour cela ils ont effectué des mesures quant à la vitesse de chargement et ont pour objectif une valeur de 1.0 en terme de vitesse de chargement. Leurs étude se base sur des données issues de l'année précédente et ils montrent que les données, qui représentent la vitesse de chargement, sont distribuées selon une loi normale de moyenne $\mu = 1.005$ et d'écart-type $\sigma = 0.10$. On considère que la vitesse de chargement est acceptable si la mesure est comprise entre 0.95 et 1.05.

1. On considère que la distribution de la vitesse de chargement reste inchangée par rapport aux années précédentes. On demande alors d'estimer différentes probabilités.

   On rappelle que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite, *i.e.* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, dans le cas où vous devez faire vos calculs à l'aide d'une table de la loi normale.

   Nous pouvons maintenant répondre aux différentes questions dans le cas où la vitesse de téléchargement est modélisée par une variable aléatoire X distribuée selon une loi $\mathcal{N}(1.005, 0.10)$:

   - Quelles est la probabilité que cette vitesse de téléchargement soit inférieure à 1, *i.e.* calculer $\mathbb{P}[X < 1]$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X<1] &= \mathbb{P}\left[\frac{X-1.005}{0.1} < \frac{1-1.005}{0.1}\right], \\
&\quad \downarrow \text{ on pose ensuite } Z = \frac{X-1.005}{0.1} \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&= \mathbb{P}[Z < -0.05], \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise le fait que } \mathbb{P}[Z<-t] = 1-\mathbb{P}[Z<t] \\
&= 1 - \mathbb{P}[Z < 0.05], \\
&\quad \downarrow \text{ on recherche la valeur dans la table de la loi normale} \\
&= 1 - 0.5199, \\
&= 0.4801.
\end{aligned}
$$

- Quelle est la probabilité que cette vitesse de téléchargement soit comprise entre 0.95 et 1, *i.e.* calculer $\mathbb{P}[0.95 < X < 1.0]$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[0.95 < X < 1\right] &= \mathbb{P}\left[\frac{0.95 - 1.005}{0.1} < \frac{X - 1.005}{0.1} < \frac{1 - 1.005}{0.1}\right], \\
&\quad \downarrow \text{ on pose ensuite } Z = \frac{X - 1.005}{0.1} \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&= \mathbb{P}\left[-0.55 < Z < -0.05\right], \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise le fait que } \mathbb{P}\left[a < Z < b\right] = \mathbb{P}\left[Z < b\right] - \mathbb{P}\left[Z < a\right] \\
&= \mathbb{P}\left[Z < -0.05\right] - \mathbb{P}\left[Z < -0.55\right], \\
&\quad \downarrow \text{ on recherche la valeur dans la table de la loi normale} \\
&= 0.4801 - 0.2912, \\
&= 0.1889.
\end{aligned}
$$

- Quelle est la probabilité que cette vitesse de téléchargement soit comprise entre 1 et 1.05, *i.e.* calculer $\mathbb{P}[1 < X < 1.05]$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[1 < X < 1.05\right] &= \mathbb{P}\left[\frac{1 - 1.005}{0.1} < \frac{X - 1.005}{0.1} < \frac{1.05 - 1.005}{0.1}\right], \\
&\quad \downarrow \text{ on pose ensuite } Z = \frac{X - 1.005}{0.1} \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&= \mathbb{P}\left[-0.05 < Z < 0.45\right], \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise le fait que } \mathbb{P}\left[a < Z < b\right] = \mathbb{P}\left[Z < b\right] - \mathbb{P}\left[Z < a\right] \\
&= \mathbb{P}\left[Z < 0.45\right] - \mathbb{P}\left[Z < -0.05\right], \\
&\quad \downarrow \text{ on recherche la valeur dans la table de la loi normale} \\
&= 0.6736 - 0.4801, \\
&= 0.1935.
\end{aligned}
$$

- Quelle est la probabilité que cette vitesse de téléchargement soit plus petite que 0.95 ou supérieure à 1.05, *i.e.* calculer $\mathbb{P}[(X < 0.95) \cup (X > 1.05)]$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[(X < 0.95) \cup (X > 1.05)] &= 1 - \mathbb{P}[0.95 < X < 1.05], \\
&\quad \downarrow \text{ on mobilise les deux questions précédentes} \\
&= 1 - 0.1935 - 0.1889, \\
&= 0.6176.
\end{aligned}
$$

2. L'objectif des opérations est faire en sorte de réduire la probabilité que la vitesse de chargement soit inférieure à 1. On souhaite savoir si l'équipe doit se concentrer sur l'augmentation de la vitesse moyenne de chargement (*i.e.* augmenter la valeur de μ à 1.05) ou sur un moyen de réduire la variabilité de la vitesse de chargement (*i.e.* réduire l'écart-type σ du process à 0.075). Pour cela, on va étudier la valeur de la probabilité de cet évènement en fonction des deux modifications de paramètres.

   - L'augmentation de μ implique le changement suivant :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X<1] &= \mathbb{P}\left[\frac{X-1.05}{0.1} < \frac{1-1.05}{0.1}\right], \\
&\quad \downarrow \text{ on pose ensuite } Z = \frac{X-1.05}{0.1} \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&= \mathbb{P}[Z < -0.5], \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise le fait que } \mathbb{P}[Z<-t] = 1-\mathbb{P}[Z<t] \\
&= 1-\mathbb{P}[Z<0.5], \\
&\quad \downarrow \text{ on recherche la valeur dans la table de la loi normale} \\
&= 1-0.6915, \\
&= 0.3085.
\end{aligned}
$$

- La diminution de σ implique le changement suivant :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X<1] &= \mathbb{P}\left[\frac{X-1.005}{0.075} < \frac{1-1.005}{0.075}\right], \\
&\quad \downarrow \text{ on pose ensuite } Z = \frac{X-1.005}{0.075} \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&= \mathbb{P}[Z < -0.067], \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise le fait que } \mathbb{P}[Z<-t] = 1-\mathbb{P}[Z<t] \\
&= 1-\mathbb{P}[Z<0.067], \\
&\quad \downarrow \text{ on recherche la valeur dans la table de la loi normale} \\
&= 1-0.5279, \\
&= 0.4721
\end{aligned}
$$

Il est donc préférable d'augmenter la vitesse moyenne de chargement, donc d'augmenter la valeur de μ.

Lancer de Javelots

On suppose que la distance en mètre parcouru par un javelot lancé par un athlète A suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que exactement 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres et exactement 25% des javelots atteignent moins de 50 mètres. Calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi que l'écart-type de cette longueur.

On pourrait reformuler cet exerce par : déterminer la moyenne et l'écart-type de la loi normale, ce qui laisse présager la résolution d'un système d'équations à deux inconnues ... ça tombe, on a deux données à utiliser !

On va noter X la variable aléatoire traduisant la longueur parcourue par un javelot.

- la phrase 10% *des javelots atteignent plus de* 75 *mètres* peut se traduire par

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 75) &= 0.1, \\
P(X \leq 75) &= 0.9.
\end{aligned}
$$

- la phrase 25% *des javelots atteignent moins de* 50 *mètres* peut se traduire par

$$
P(X \leq 50) = 0.25.
$$

Il nous reste à faire apparaître nos paramètre de moyennes et écart-type en se ramenant à une variable aléatoire Z centrée-réduite. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} P(X \leq 75) &= 0.9, \\ P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{75-\mu}{\sigma}\right) &= 0.9 \\ P\left(Z \leq \frac{75-\mu}{\sigma}\right) &= 0.9 \end{aligned}$$

Il nous reste à trouver pour quelle valeur de z, $P(Z < z) = 0.9$. On trouve $z = 1.28$. On procède de la même façon avec la deuxième équation et on trouve :

$$\begin{aligned} P(X \leq 50) &= 0.25, \\ P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{50-\mu}{\sigma}\right) &= 0.25 \\ P\left(Z \leq \frac{50-\mu}{\sigma}\right) &= 0.25 \end{aligned}$$

Il nous reste à trouver pour quelle valeur de z, $P(Z < z) = 0.25$, ce qui est pareil que de trouver la valeur de z pour laquelle $P(Z < -z) = 0.75$ (par symétrie de la loi normale). Cela nous donne $z = -0.68$. on aboutit au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{75-\mu}{\sigma} & = & 1.28 \\ \frac{50-\mu}{\sigma} & = & -0.68 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu & = & 75 - 1.28\sigma \\ 50 - (75 - 1.28\sigma) & = & -0.68\sigma \end{cases}$$

La deuxième équation nous donne $1.96\sigma = 25$ soit $\sigma = 12.76$ et la première équation nous donne alors $\mu = 75 - 1.28\frac{25}{1.96} = 58.67$.

Pour ceux qui ont fait *Maths Expert*

On pourrait aussi résoudre ce système en utilisant des outils d'algèbre linéaire, *i.e.* des matrices !

Si on note $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ les deux inconnues que l'on cherche à déterminer dans le système d'équations :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases},$$

alors on peut réécrire notre système sous la forme

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$.

Dans ce cas les solutions de notre système (si elles existent) sont données par

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

où A^{-1} désigne l'inverse de la matrice A et est donnée par :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{det(A)} Com(A)^T, \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut alors appliquer cela à notre système précédent qui se présente sous la forme

$$\begin{cases} \mu + 1.28\sigma & = & 75 \\ -\mu + 0.68\sigma & = & -50 \end{cases},$$

avec $\mathbf{x} = (\mu, \sigma)$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1.28 \\ -1 & 0.68 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = (75, -50)$.
On peut alors calculer $\mathbf{A}^{-1}$ et on en déduit la valeur du vecteur $\mathbf{x}$ donc de μ et σ.

Au final ... cela restait plus simple par substitution car le système est relativement simple.